

第四章 光辐射在介质波导中的传播

光波导的种类:

- (1) 平板波导(薄膜波导): 由三层平板形介质构成, 中间一层折射率较大, 上、下层的较小。只能在横截面的一个方向上限制光波。
- (2) 矩形波导(条形波导或带状波导): 可在横截面的两个方向上限制光波。
- (3) 圆柱形波导, 主要指光导纤维(光纤)。

分析波导介质导光原理的两种方法:

- (1) 基于几何光学的射线理论

射线理论: 把光线处理成光射线, 用光学中的反射和折射来解释波导中光的传播现象。

应用射线理论分析的前提: 光学元器件及光波导尺寸远大于光波长。

- (2) 基于麦克斯韦方程组的波导理论

应用波导理论分析的前提: 光学元器件及光波导尺寸和光波长可比拟。

§ 4-1 光在介质分界面上的反射与折射

一、菲涅耳公式

TE 波: 电场矢量垂直于入射面、磁场矢量平行于入射面。

TM 波: 磁场矢量垂直于入射面、电场矢量平行于入射面。

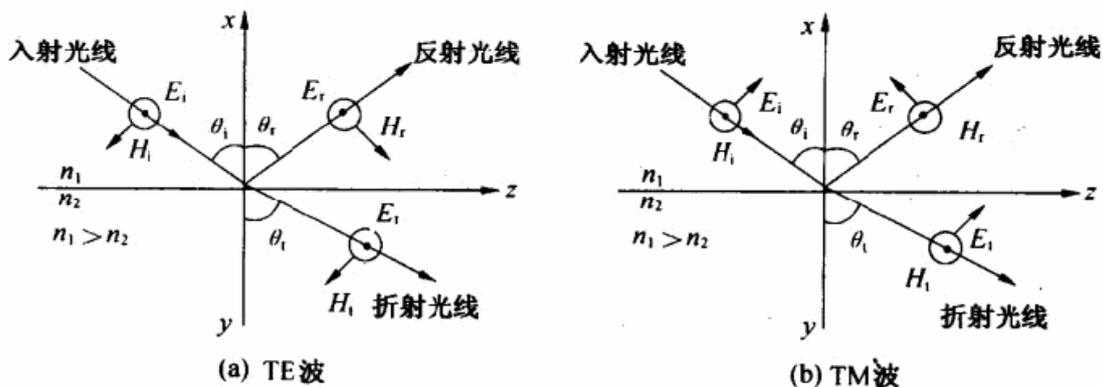


图 4.1 平面波的反射与折射

TE 波的反射系数

$$r_{TE} = \frac{\left[n_1 \cos \theta_i - (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left[n_1 \cos \theta_i + (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (4.1)$$

TM 波的反射系数

$$r_{TM} = \frac{\left[n_2^2 \cos \theta_i - n_1 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left[n_2^2 \cos \theta_i + n_1 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (4.2)$$

反射波复振幅 B 和入射波复振幅 A 的关系

$$B = r(\lambda)A \quad (4.3)$$

二、全反射的相移

全反射情况下反射系数由实数变为复数： $r = \exp(-j2\varphi)$ ，且反射光相对于入射光产生一相移 2φ ，称为“全反射相移角”。

$$\varphi_{TE} = \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_i} \quad (4.4)$$

$$\varphi_{TM} = \arctan \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_i} \quad (4.5)$$

三、非均匀介质中光线的弯曲

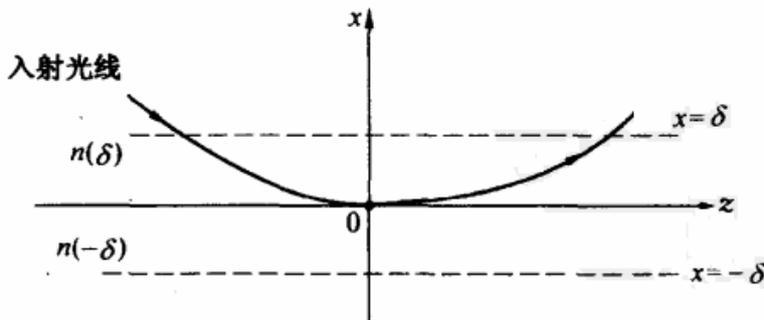


图 4.2 光线在非均匀介质中的弯曲

非均匀介质中光传播路径为曲线：从高折射率区入射后，传播路径连续弯曲，到达一个拐点后又折向高折射率区。入射光在经过拐点（上图中的 O 点）时，TE 波或 TM 波均会产生 $\pi/2$ 的弯曲相移。

四、古斯-汉欣位移

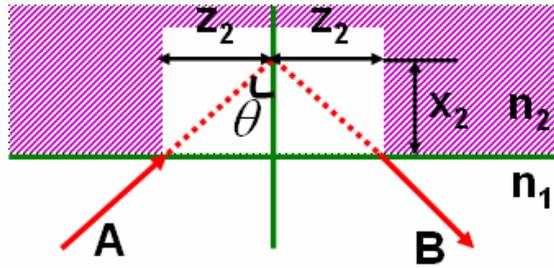


图 4.3 界面全反射的光线图像

发生全反射时，实际光能量是进入第二种媒质后再返回到第一种媒质中，电磁场在第二种媒质中以“瞬逝波”形式传播（z 方向是行波，x 方向是衰减波）：

$$\exp\left(\frac{\omega x}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}\right) \cdot \exp\left[j\omega\left(t - \frac{n_1 \sin \theta_i}{c} z\right)\right] \quad (4.6)$$

古斯-汉欣位移：理想反射点与实际反射点之间的侧向位移，亦称穿透深度，数值为：

$$x_2 = \frac{\lambda}{2\pi \left[\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.7)$$

原因：实际光线总存在一定的空间谱宽。

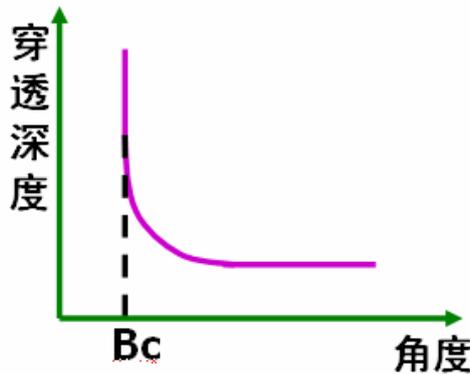


图 4.4 穿透深度与入射角的关系曲线

Z 向位移：

$$\text{TE 波: } z_{2//} = \frac{\tan \theta_i}{\sqrt{\beta^2 - k_2^2}} \quad (4.8)$$

$$\text{TM 波: } z_{2\perp} = z_{2//} \left(\frac{\beta^2}{k_2^2} + \frac{\beta^2}{k_1^2} - 1 \right)^{-1} \quad (4.9)$$

$$\text{平板波导介质的有效厚度: } h_e = h + x_3 + x_2 \quad (4.10)$$

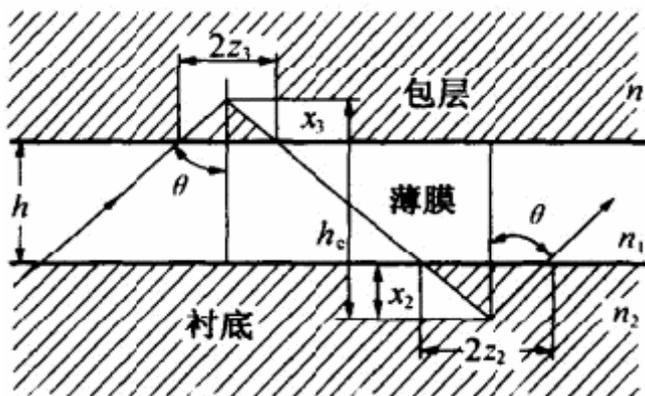


图 4.5 平板波导中 Z 字形传播的光线图像

§ 4-2 介质平板光波导的射线分析方法

平板波导介质的组成：波导薄膜、衬底及包层。

对称型平板波导：衬底和包层材料相同， $n_1 > n_2 = n_3$

非对称型平板波导：衬底和包层材料不同， $n_1 > n_2 > n_3$

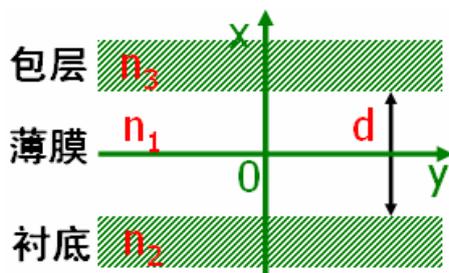


图 4.6 平板介质波导的横截面

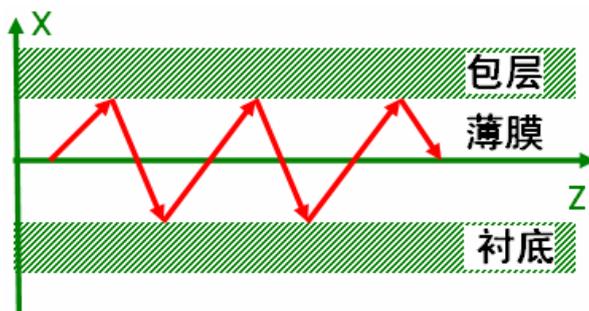


图 4.7 平板介质波导中光的传播路径

一、平板波导的模式

下界面全反射临界角： $\theta_{12} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

上界面全反射临界角： $\theta_{13} = \arcsin\left(\frac{n_3}{n_1}\right)$

1. $\theta_i > \theta_{12} > \theta_{13}$ ：导模。在薄膜内沿 x 方向形成驻波，在包层和衬底内场振幅是

沿 x 方向指数衰减的消逝场。

2. $\theta_{13} > \theta_i > 0$: 包层模, 指分别由衬底和包层入射的两个平面波叠加而成的模, 在薄膜、衬底和包层内均形成沿 x 方向的驻波。

3. $\theta_{12} > \theta_i > \theta_{13}$: 衬底模。在薄膜和衬底中形成沿 x 方向的驻波, 在包层中形成场振幅沿 x 方向指数衰减的消逝场。

包层模和衬底模统称为“辐射模”。

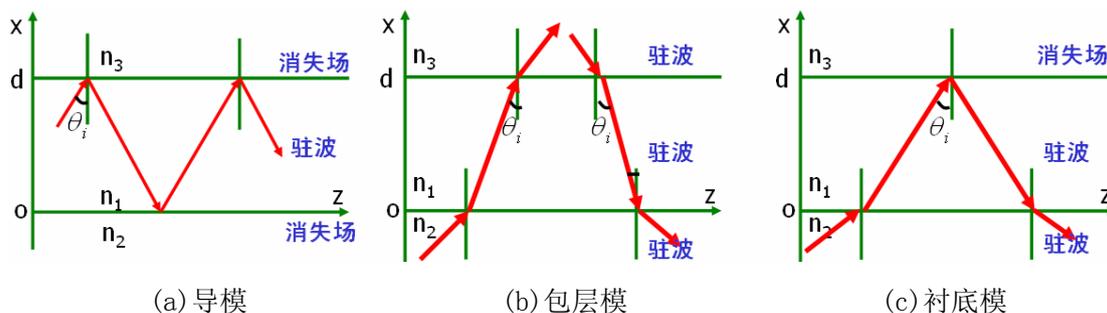


图 4.8 平板波导模式的几何光学模型

二、导模的特点与模方程

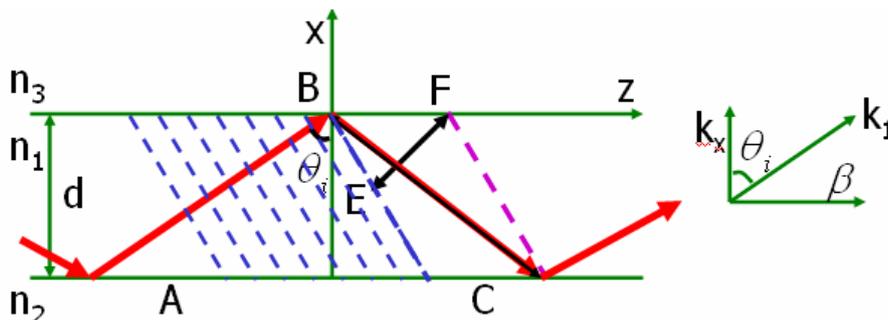


图 4.9 锯齿光线的波矢量图

横截面有稳定场分布的条件即平板波导特征方程:

$$2dn_1k_0 \cos \theta_i + 2\varphi_{12} + 2\varphi_{13} = -2m\pi (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.11)$$

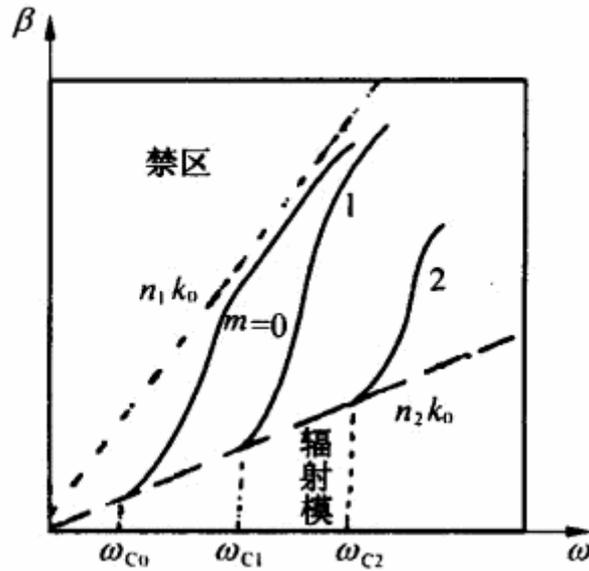


图 4.10 平板波导 β 对 ω 关系曲线

- (1) 禁区: 对应 $\beta > n_1 k_0$ 。传播常数 β 的最大可能值为 $\beta_{\max} = n_1 k_0$, 所以 $\beta > n_1 k_0$ 不可能存在。
- (2) 导模: 对应 $n_1 k_0 > \beta > n_2 k_0$, 具有离散谱分布。
- (3) 辐射模: 对应 $\beta < n_2 k_0$, 具有连续谱分布。

三、导模的截止

导模截止: $\theta_i = \theta_{i2}, \beta = n_2 k_0$, 下界面处于全反射临界状态, 将进入辐射模状态。

导模截止状态的平板波导特征方程:

$$(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} k_0 d = m\pi + \phi'_{13} \quad (4.12)$$

1. 模式数量

$$M = \frac{2d}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi} \phi'_{13} \quad (4.13)$$

2. 第 m 阶导模的截止频率

$$\omega_c = \frac{c\pi}{d(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}} \left(m + \frac{1}{\pi} \phi'_{13} \right) \quad (4.14)$$

3. 第 m 阶导模的截止厚度

$$d_c = \frac{\lambda}{2(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}} \left(m + \frac{1}{\pi} \phi'_{13} \right) \quad (4.15)$$

维持单模传输的最大厚度

$$d_{\max} = \frac{\lambda}{2(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\pi} \phi'_{13} \right) \quad (4.16)$$

维持单模传输的最小厚度

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\pi} \phi'_{13} \right) \quad (4.17)$$

维持单一零阶模传输的厚度条件

$$d_{\min} < d < d_{\max} \quad (4.18)$$

若平板波导为对称结构，则有 $d_c \rightarrow 0, d_{\min} = 0, \omega_c = 0, \lambda \rightarrow \infty$ 。

注：对称结构平板波导中，任意波长的光波都能以基模或零阶模的形式传播。

四、渐变折射率平板波导

波矢量：

$$\begin{cases} k(x) = n(x)k_0 \\ k_x = n(x)k_0 \cos \theta(x) \\ k_z = \beta = n(x)k_0 \sin \theta(x) \end{cases} \quad (4.19)$$

在拐点处 $k(x)$ 无 x 分量， $\beta = n(x_1)k_0 = n(x_2)k_0$ 。

注： β 是与 x 无关的常数，即 $\partial\beta/\partial x = 0$ 。

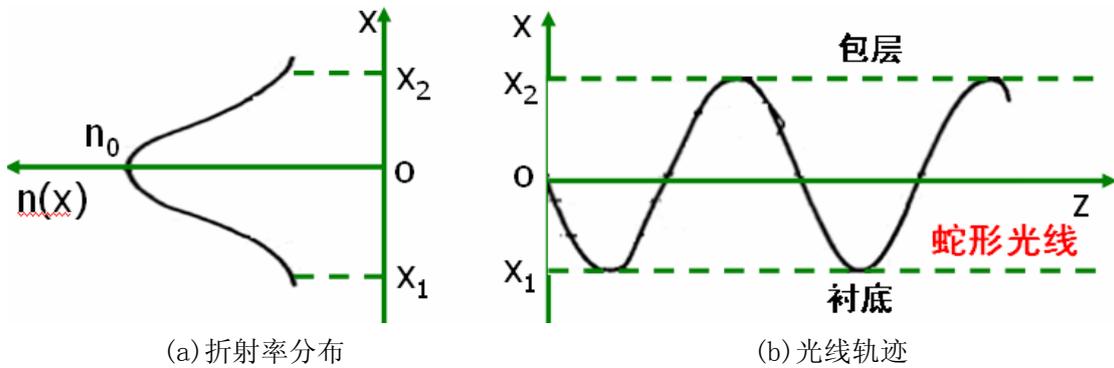


图 4.11 对称渐变折射率平板波导

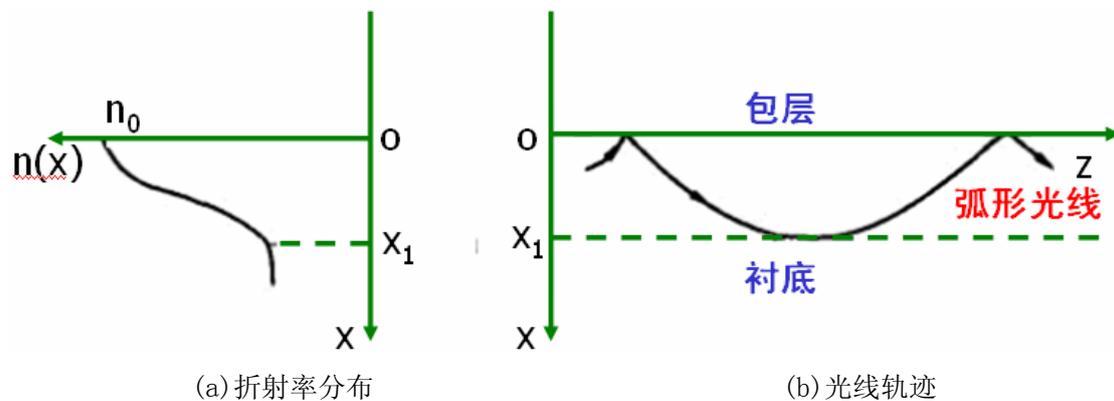


图 4.12 非对称渐变折射率平板波导

§ 4-3 光纤中的射线分析

一、概述

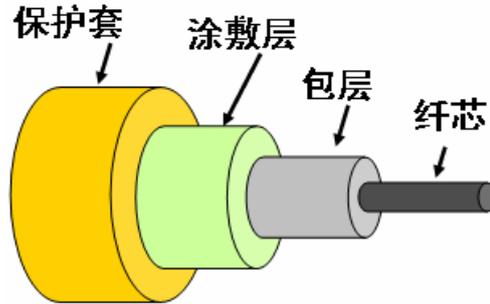


图 4.13 光纤剖面结构图

按折射率分布分类 { 阶跃(突变) 光纤
渐变光纤

按传输模式分类 { 单模光纤
多模光纤

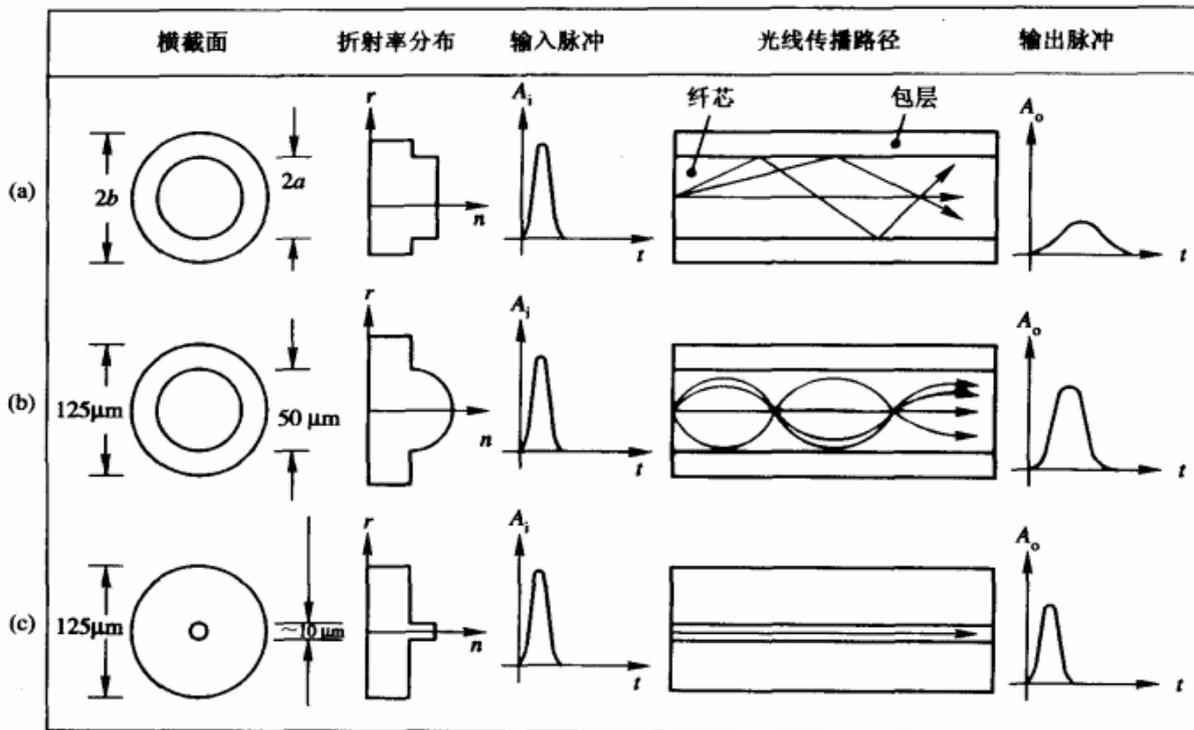


图 4.14 三种基本类型的光纤

(a)阶跃型多模光纤；(b)渐变型多模光纤；(c)单模光纤

为调整工作波长或改善色散特性，可以在图 4.14(c) 常规单模光纤的基础上，设计许多结构复杂的特种单模光纤。最有用的若干典型特种单模光纤的横截面结构和折射率分布示于图 4.15。

双包层光纤：折射率分布像 W 形，又称为 W 型光纤。这种光纤有两个包层，内包层外直径 $2a'$ 与纤芯直径 $2a$ 的比值 $a'/a \leq 2$ 。适当选取纤芯、外包层和内包层的折射率 n_1 、 n_2 和 n_3 ，调整 a 值，可以得到在 $1.3\sim 1.6\ \mu\text{m}$ 之间色散变化很小的色散平坦光纤，或把零色散波长移到 $1.55\ \mu\text{m}$ 的色散移位光纤。

三角芯光纤：纤芯折射率分布呈三角形，这是一种改进的色散移位光纤。这种光纤在 $1.55\ \mu\text{m}$ 有微量色散，有效面积较大，适合于密集波分复用和孤子传输的长距离系统使用，康宁公司称它为长距离系统光纤，这是一种非零色散光纤。

椭圆芯光纤：纤芯折射率分布呈椭圆形。这种光纤具有双折射特性，即两个正交偏振模的传输常数不同。强双折射特性能使传输光保持其偏振状态，因而又称为双折射光纤或偏振保持光纤。

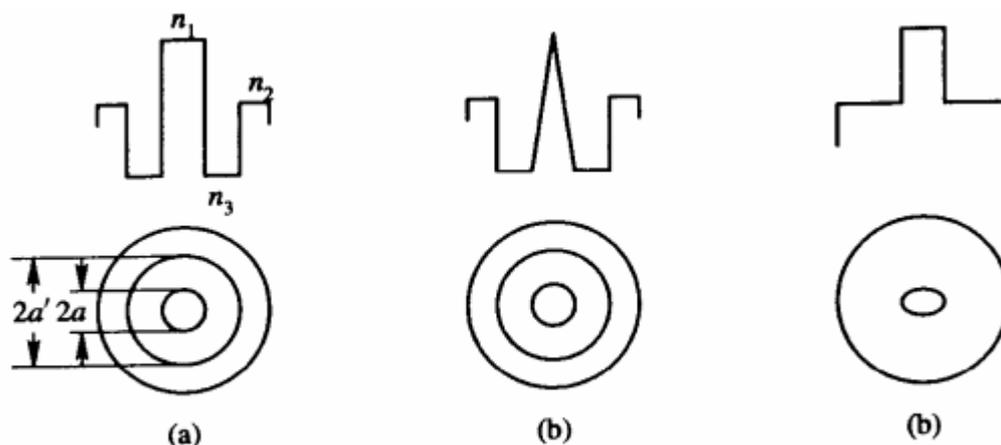


图 4.15 典型单模特种光纤

(a) 双包层 (b) 三角芯 (c) 椭圆芯

以上各种特征不同的光纤，其用途也不同。突变型多模光纤信号畸变大，相应的带宽只有 $10\sim 20\text{MHz}\cdot\text{km}$ ，只能用于小容量 (8Mb/s 以下) 短距离 (几 km 以内) 系统。渐变型多模光纤的带宽可达 $1\sim 2\text{GHz}\cdot\text{km}$ ，适用于中等容量 ($34\sim 140\text{Mb/s}$) 中等距离 ($10\sim 20\text{km}$) 系统。大容量 ($622\text{ Mb/s}\sim 2.5\text{Gb/s}$) 长距离 (30 km 以上) 系统都要使用单模光纤。

二、阶跃光纤的射线理论

1. 子午线与子午面

子午线：光纤在传播时始终在同一个包含光纤轴线的平面内。子午线在光纤端面的投影是一条直径。

子午面：包含子午线的平面。

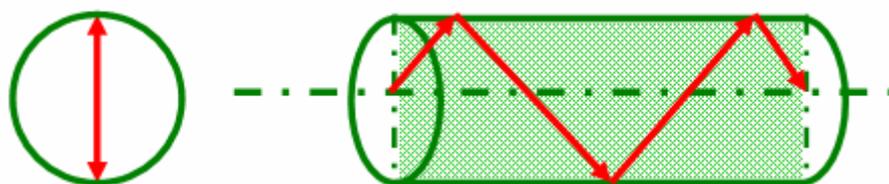


图 4.16 光纤中的子午射线

2. 相对折射率差

相对折射率差 Δ 定义为

$$\Delta = [1 - (\frac{n_2}{n_1})^2] / 2 \tag{4.20}$$

当 $\Delta < 0.01$ 时，上式简化为

$$\Delta \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \tag{4.21}$$

3. 数值孔径

纤芯折射率： n_1 ；包层折射率： n_2 ；空气折射率： $n_0 = 1$ 。光线在光纤端面入射角： θ ；折射角： θ_1 ，折射后的光线在纤芯直线传播，并在纤芯与包层界面以角度 φ 入射到包层 ($n_1 > n_2$)。

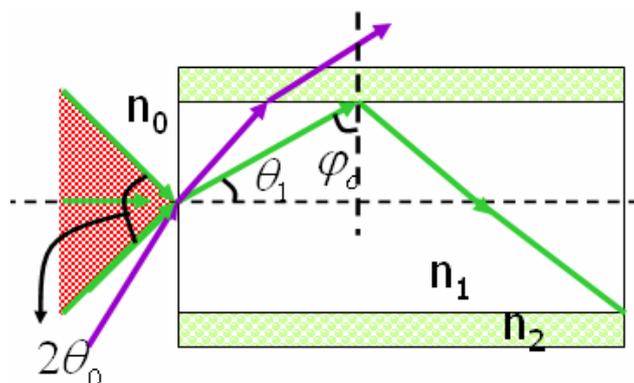


图 4.17 光纤的数值孔径 NA

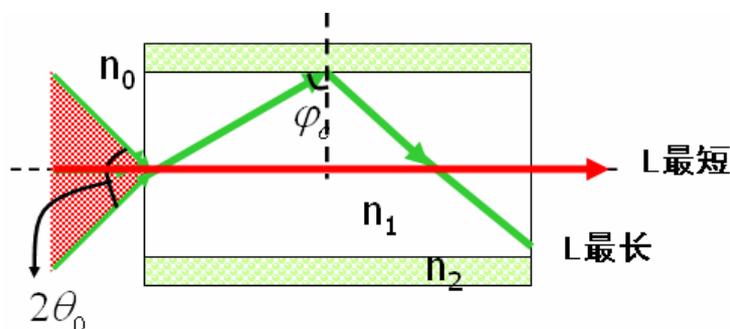


图 4.18 不同入射角的光线产生时延差示意图

由全反射定律可知存在一临界角 φ_c ($\varphi_c = \arcsin(n_2/n_1)$)，

$\varphi > \varphi_c$: 光线在交界面发生全反射而返回纤芯, 并以折线的形状向前传播。

$\varphi = \varphi_c$: , 光线以 φ_c 入射到交界面, 并沿交界面向前传播(折射角为 90°), 此时对应的光纤端面的入射角为 θ_0 。根据斯奈尔定律得到:

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 = n_1 \cos \varphi_c \quad (4.22)$$

$\varphi < \varphi_c$: 光线在交界面折射进入包层并逐渐消失。

只有在半锥角为 $\theta \leq \theta_0$ 的圆锥内入射的光束才能在光纤中传播。根据这个传播条件, 定义临界角 θ_0 的正弦为数值孔径(Numerical Aperture, NA):

$$NA = n_0 \sin \theta_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (4.23)$$

$\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$: 纤芯与包层相对折射率差。

NA 表示光纤接收和传输光的能力, NA(或 θ_0) 越大, 光纤接收光的能力越强, 从光源到光纤的耦合效率越高。

4. 子午光线在光纤中的时延差

通过 L 长度的距离后, 最大入射角 ($\theta = \theta_0$) 和最小入射角 ($\theta = 0$) 对应的两条光线之间时间延迟差近似为:

$$\Delta\tau = \frac{n_1}{c} \left(\frac{L}{\sin \varphi_c} - L \right) = \frac{L n_1^2}{c n_2} \Delta \quad (4.24)$$

这种时间延迟差在时域产生脉冲展宽, 或称为信号畸变。

5. 光线在几种特殊形状光纤中的传播

(1) 光纤的直径不均匀 (锥形光纤)

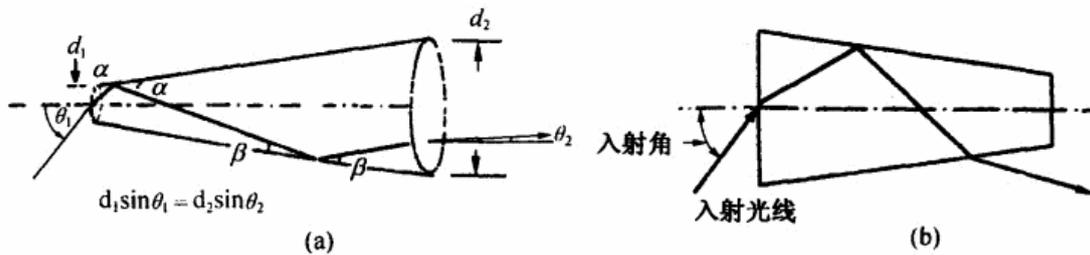


图 4.19 锥形光纤内光线的传播

采用光线沿窄口径而非宽口径一端入射的方式,

应用: A. 实现光束与锥状光线对接的光纤之间的耦合。

B. 实现数值孔径的变换: $d_1 \sin \theta_1 = d_2 \sin \theta_2$ 。

(2) 光纤端面倾斜

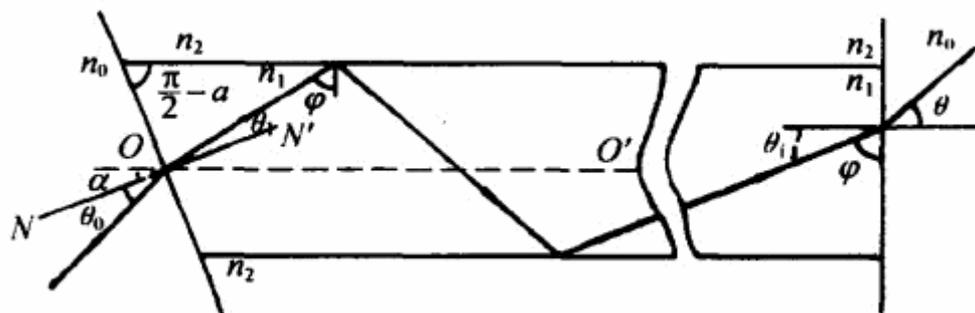


图 4.20 光在端面倾斜光纤中的传播

数值孔径: $\sin \theta_m = NA \cos \alpha \mp n_2 \sin \alpha$ (4.25)

(3) 光纤弯曲

由于弯曲使得光线在芯层与包层分界面处的入射角 φ 变小, 若弯曲程度很大导致 φ 小于全反射的临界角, 则光能量将泄露到包层辐射输出。

在工程应用中, 光纤的弯曲直径一般不小于 4cm。

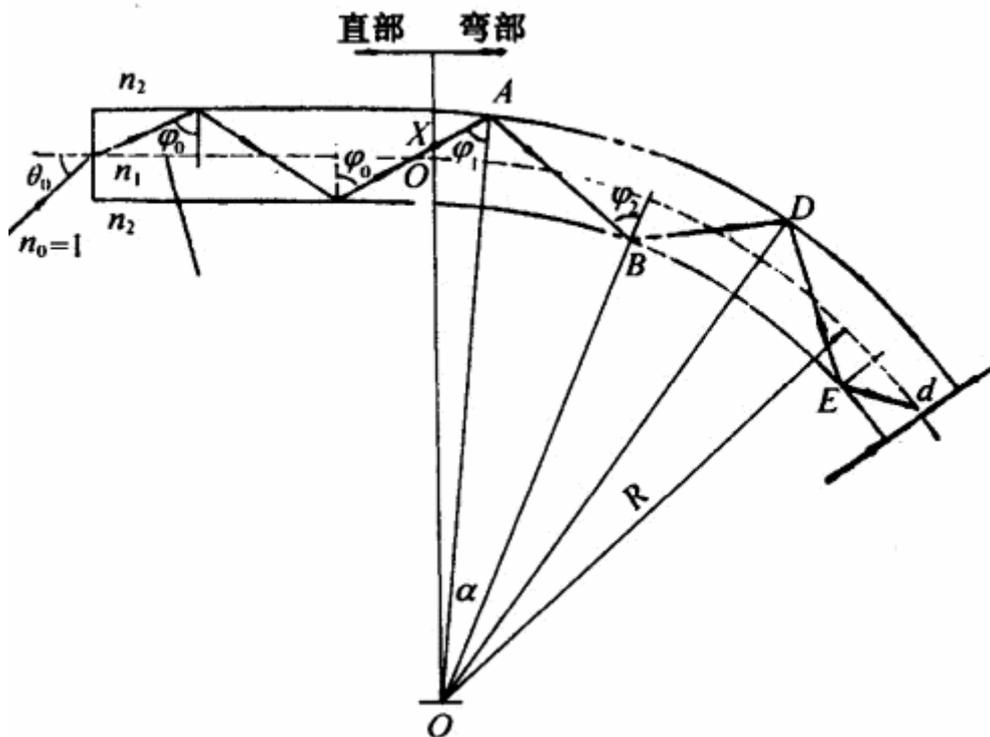


图 4.21 弯曲光纤中光的传播

6. 斜光线的传播

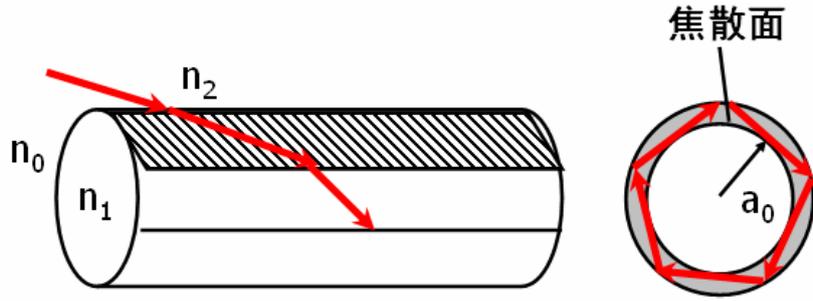


图 4.22 斜光线在光纤中的传播路径示意图

斜光线在光纤中的传播轨迹不在同一个平面，轨迹在横截面上的投影是由多根折线组成，折线限制在由包层和焦散面（半径为 a_0 ）限制的截面内。当焦散面与光纤芯包界面重合，折线变为螺旋线；当 $a_0 = 0$ ，斜光线变为子午光线。

三、渐变光纤的射线理论

1. 折射率分布

一般介质波导截面上的折射率分布可以用指数型分布表示为

$$\left. \begin{aligned} n(r) &= n(0) \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right]^{1/2} & (0 < r \leq a) \\ n(r) &= n(a) & (r \geq a) \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

$\alpha = \infty$ ：阶跃光纤

$\alpha = 2$ ：平方梯度光纤，折射率分布为抛物线型。

2. 数值孔径

从端面不同点入射，NA 也不同，采用“局部数值孔径”的概念。

光纤端面与轴交点处的数值孔径：

$$NA' = \sin \theta_m = \sqrt{n^2(0) - n^2(a)} \quad (4.27)$$

光纤端面其它点的数值孔径：

$$NA' = \sqrt{n^2(r) - n^2(a)} \quad (4.28)$$

3. 轨迹方程

子午光线的轨迹方程：

$$z = \int_0^r \frac{n(0) \cos \varphi_0}{\left[n^2(r) - n^2(0) \cos^2 \varphi_0 \right]^{1/2}} dr \quad (4.29)$$

4. 抛物线型折射率光纤中的轨迹方程

子午光线的轨迹方程：

$$r = \frac{\sin \varphi_0}{A} \sin \left(\frac{A}{\cos \varphi_0} z \right) \quad (4.30)$$

其中 $A = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a}$ 。

该正弦曲线的振幅： $R_s = \frac{\sin \varphi_0}{A}$ ；角频率： $\omega_s = \frac{A}{\cos \varphi_0}$ ；周期： $T = \frac{2\pi}{A} \cos \varphi_0$

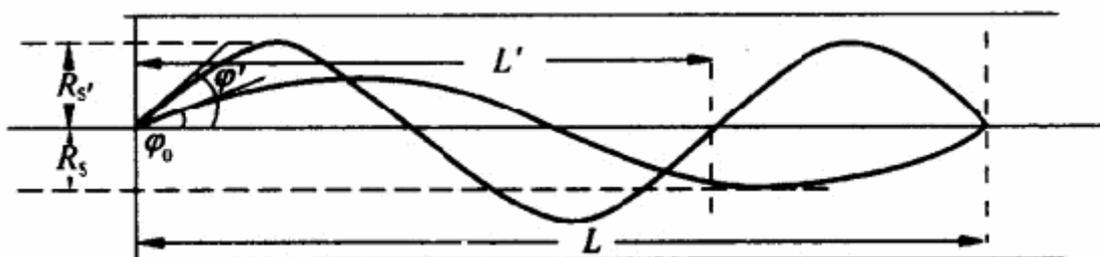


图 4.23 梯度光纤中光线轨迹与入射角的关系

5. 自聚焦光纤

自聚焦效应：从端面输入的不同入射角对应的子午光线在光纤中具有相同的空间周期和时间周期，在传播过程中虽然经历的路程不同，但是最终都会聚在一点，这种现象称为自聚焦(Self-Focusing)效应。

不仅不同入射角相应的光线会聚在同一点上，而且这些光线的延迟也近似相等。使用该种类光线可有效避免模间色散。

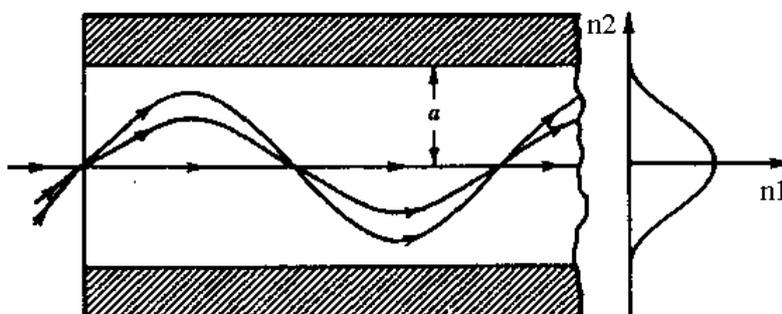


图 4.24 自聚焦光纤中光束的传播轨迹

折射率分布满足双曲正割型函数的光纤具有自聚焦功能，在实际应用中多采用折射率为抛物线型函数分布的光纤： $n(r) = n(0)(1 - A^2 r^2)$ 。

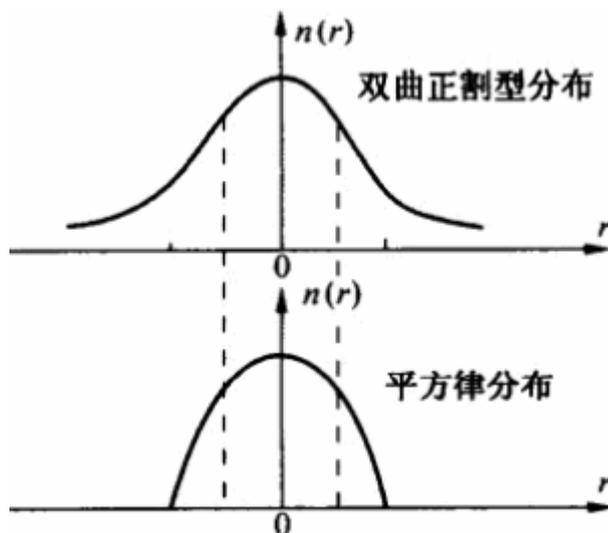


图 4.25 两种折射率分布的比较

§ 4-4 阶跃光纤中的电磁波模式理论

模式是满足亥姆霍兹方程的一个特解，满足在波导中心有界、边界趋于无穷时为零的边界条件，这是它的数学含义。而从其物理含义而言，模式为正规光波导的光场沿横截面分布的一种场图。模式主要分为以下几类：

- (1) TEM 模：模式只有横向分量，无纵向分量。即 $E_z=0, H_z=0$
- (2) TE 或 TM 模：只有一个纵向分量。TE： $E_z=0$ 但 $H_z \neq 0$ ；TM： $H_z = 0$ 但 $E_z \neq 0$
- (3) HE 或 EH 模：两个纵向分量均不为零。

一、圆柱坐标系中的波动方程

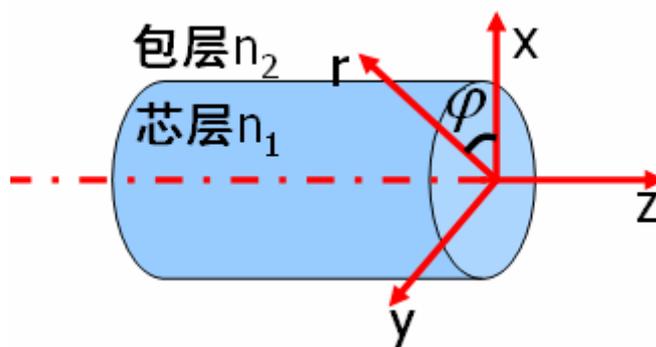


图 4.26 光纤中的圆柱坐标系

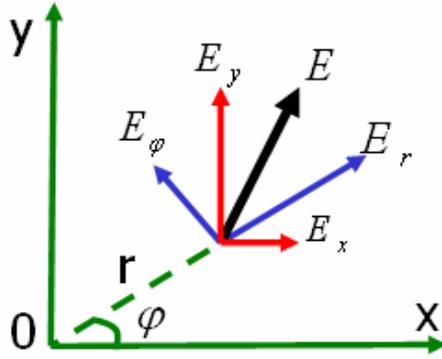


图 4.27 直角坐标系与圆柱坐标系的关系

圆柱坐标系中纵向分量和横向分量之间的关系为

$$E_r = -\frac{j}{k_0^2 n^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{k_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right] \quad (4.31a)$$

$$E_\phi = -\frac{j}{k_0^2 n^2 - \beta^2} \left[\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} k_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \quad (4.31b)$$

$$H_r = -\frac{j}{k_0^2 n^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{k_0 n^2}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad (4.31c)$$

$$H_\phi = -\frac{j}{k_0^2 n^2 - \beta^2} \left[\frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} k_0 n^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \quad (4.31d)$$

理想阶跃折射率光纤满足：

- (1) 材料线性、各向同性，不存在电流或电荷
- (2) 光纤为半无限长，光波沿轴线传输
- (3) 光纤结构均匀，纤芯半径为 a，包层无限大
- (4) 光纤为无损介质

电磁波在光纤中传播的基本方程为矢量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 E + \nabla \left(\frac{1}{\epsilon} E \cdot \nabla \epsilon \right) = \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (4.32a)$$

$$\nabla^2 H + \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \epsilon \right) \times \nabla \times H = \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (4.32b)$$

圆柱坐标系中，电磁场可表示为

$$E = E(r, \phi) \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (4.33a)$$

$$H = H(r, \phi) \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (4.33b)$$

E_z, H_z 满足的齐次标量波动方程：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \beta^2) \psi = 0 \quad (4.34)$$

采用分离变量法, 令

$$\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \quad (4.35)$$

光纤为圆柱形波导, 电磁场沿 φ 方向是以 2π 为周期的周期函数, 有

$$\Phi(\varphi) = \exp(iv\varphi) (v = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.36)$$

(4.34) 可改写为

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + (k^2 - \beta^2 - \frac{v^2}{r^2}) R(r) = 0 \quad (4.37)$$

二、波动方程的解

1. 解的形式

(1) 芯区 ($r \leq a, k = k_1 = k_0 n_1$)

对于导模, 在纤芯中沿径向应呈驻波分布, (4.37) 式应有振荡形式的解, 应满足 $k_0^2 n_1^2 - \beta^2 > 0$ 。令 $u^2 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) a^2$, 解为

$$\begin{pmatrix} E_{z1} \\ H_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} J_v \left(\frac{ur}{a} \right) \exp(jv\varphi) \quad (4.38)$$

其中 A, B 为常系数。

(2) 包层 ($r > a, k = k_2 = k_0 n_2$)

导模在包层场分量应迅速衰减, 应满足 $\beta^2 - k_0^2 n_2^2 > 0$ 。令 $w^2 = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2) a^2$, 解为

$$\begin{pmatrix} E_{z2} \\ H_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} K_v \left(\frac{wr}{a} \right) \exp(jv\varphi) \quad (4.39)$$

其中 C, D 为常系数。定义光纤的“归一化频率 V ”:

$$V = \sqrt{u^2 + w^2} = \sqrt{k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2)} \quad (4.40)$$

导模传输常数的取值范围

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1 \quad (4.41)$$

2. 边界条件和特征方程

求出的 E_z, H_z 应满足纤芯和包层边界 ($r = a$) 连续的条件, 因此可写为

$$E_z = \begin{cases} \frac{A}{J_v(u)} J_v\left(\frac{ur}{a}\right) \exp(iv\varphi) (r < a) \\ \frac{A}{K_v(w)} K_v\left(\frac{wr}{a}\right) \exp(iv\varphi) (r > a) \end{cases} \quad (4.42)$$

$$H_z = \begin{cases} \frac{B}{J_v(u)} J_v\left(\frac{ur}{a}\right) \exp(iv\varphi) (r < a) \\ \frac{B}{K_v(w)} K_v\left(\frac{wr}{a}\right) \exp(iv\varphi) (r > a) \end{cases} \quad (4.43)$$

利用 (4.31)、(4.42) 和 (4.43) 可得电磁场的横向分量

$$E_\varphi = \begin{cases} -i\left(\frac{a}{u}\right)^2 \left[A \frac{iv\beta}{r} \frac{J_v\left(\frac{ur}{a}\right)}{J_v(u)} - Bw\mu \frac{\frac{u}{a} J'_v\left(\frac{ur}{a}\right)}{J_v(u)} \right] (r < a) \\ i\left(\frac{a}{w}\right)^2 \left[A \frac{iv\beta}{r} \frac{K_v\left(\frac{wr}{a}\right)}{K_v(w)} - Bw\mu \frac{\frac{w}{a} K'_v\left(\frac{wr}{a}\right)}{K_v(w)} \right] (r > a) \end{cases} \quad (4.44)$$

$$H_\varphi = \begin{cases} -i\left(\frac{a}{u}\right)^2 \left[B \frac{iv\beta}{r} \frac{J_v\left(\frac{ur}{a}\right)}{J_v(u)} + Aw\varepsilon_0 n_1^2 \frac{\frac{u}{a} J'_v\left(\frac{ur}{a}\right)}{J_v(u)} \right] (r < a) \\ i\left(\frac{a}{w}\right)^2 \left[B \frac{iv\beta}{r} \frac{K_v\left(\frac{wr}{a}\right)}{K_v(w)} + Aw\varepsilon_0 n_2^2 \frac{\frac{w}{a} K'_v\left(\frac{wr}{a}\right)}{K_v(w)} \right] (r > a) \end{cases} \quad (4.45)$$

在 $r = a$ 出, E_φ, H_φ 应连续, 由 (4.44)、(4.45) 可得

$$A \frac{iv\beta}{a} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) - B \frac{w\mu}{a} \left[\frac{1}{u} \frac{J'_v(u)}{J_v(u)} + \frac{1}{w} \frac{K'_v(w)}{K_v(w)} \right] = 0 \quad (4.46a)$$

$$A \frac{w\varepsilon_0}{a} \left[\frac{n_1^2}{u} \frac{J'_v(u)}{J_v(u)} + \frac{n_2^2}{w} \frac{K'_v(w)}{K_v(w)} \right] + B \frac{iv\beta}{a} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) = 0 \quad (4.46b)$$

对于该齐次线性方程组, 若 A、B 有非零解, 则它们的系数行列式应为零, 由此出发可得到本征方程为

$$\left[\frac{J'_v(u)}{uJ_v(u)} + \frac{K'_v(w)}{wK_v(w)} \right] \left[\frac{n_1^2}{un_2^2} \frac{J'_v(u)}{J_v(u)} + \frac{K'_v(w)}{wK_v(w)} \right] = v^2 \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (4.47)$$

对于弱导光纤 ($n_1 \approx n_2$), 上式可简化为:

$$\frac{J'_v(u)}{uJ_v(u)} + \frac{K'_v(w)}{wK_v(w)} = \pm v \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (4.48)$$

式中的符号'表示对宗量的微分。

3. 光纤中的各种导模

$v = 0, 1, 2, \dots$: 圆周方向模数

$m = 1, 2, \dots$: 径向模数

$v = 0$: TE 波和 TM 波的场分量沿圆周方向无变化

$$v = 0 \Rightarrow \begin{cases} TM_{0m} : \text{仅有 } H_\phi, E_r, E_z \text{ 分量, } H_z = H_r = E_\phi = 0 \\ TE_{0m} : \text{仅有 } E_\phi, H_r, H_z \text{ 分量, } E_z = E_r = H_\phi = 0 \end{cases}$$

$v \neq 0 \Rightarrow E_z, H_z$ 分量都不为零, 对应 HE_{vm} 模或 EH_{vm} 模。

(1) TE_{0m} 模和 TM_{0m}

在弱导近似下, TE_{0m} 模和 TM_{0m} 有相同的特征方程

$$\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0 \quad (4.49)$$

当模式截止时, $w \rightarrow 0$, 由第二类变形的贝塞尔函数的递推关系及渐近公式得

$$\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)} \rightarrow \infty \quad (4.50)$$

截止状态下的特征方程为

$$J_0(u) = 0 \quad (4.51)$$

该方程的根为 2.4048, 5.52, 8.6537... , 分别对应 $TE_{01}(TM_{01})$, $TE_{02}(TM_{02})$, $TE_{03}(TM_{03})$... 模的截止频率。若波导的归一化频率 $V > 2.4048$, 则 $TE_{01}(TM_{01})$ 模就能在光纤中存在; 若 $V < 2.4048$, $TE_{01}(TM_{01})$ 就不是导模。对其它模式以此类推。

TE_{0m} 模和 TM_{0m} 具有相同的截止频率, 即截止时两种波形简并。若不进行弱导近似, 当离开截止时, 两模式特征方程的传输常数并不相同, 两模彼此分离。

(2) HE_{vm} 模

特性方程

$$\frac{J'_v(u)}{uJ_v(u)} + \frac{K'_v(w)}{wK_v(w)} = - \left(\frac{v}{u^2} + \frac{v}{w^2} \right) \quad (4.52)$$

利用贝塞尔函数的递推公式上式可写为

$$\frac{J_{v-1}(u)}{uJ_v(u)} = \frac{K_{v-1}(w)}{wK_v(w)} \quad (4.53)$$

$v = 1$ 时的特征方程为

$$\frac{J_0(u)}{uJ_1(u)} = \frac{K_0(w)}{wK_1(w)} \quad (4.54)$$

当模式截止、 $w \rightarrow 0$ 时， HE_{1m} 的特性方程可化为

$$\frac{J_0(u)}{uJ_1(u)} = \infty \quad (4.55)$$

即为 $J_1(u) = 0$ (4.56)

$J_1(u) = 0$ 的根为 0, 3.8317, 7.016, 10.1735 ⋯, 分别对应 HE_{11} , HE_{12} , HE_{13} , HE_{14} ⋯ 模式的截止频率。在光纤实际存在的所有导模中, 只有 HE_{11} 模式的截止频率为零, 即截止波长无穷大。 HE_{11} 模式是任何光纤中都能存在、永不截止的模式, 称为**基模或主模**。

$v > 1$ 时 HE_{vm} 模的特征方程在截止状态时可近似为

$$\frac{J_{v-1}(u)}{J_v(u)} = \frac{u}{2(v-1)} \quad (4.57)$$

求各模式截止值的方程总结为:

- 对 TE_{0m} 和 TM_{0m} 模: $J_0(u) = 0$
- 对 HE_{1m} 和 EH_{1m} 模: $J_1(u) = 0$
- 对 $HE_{vm}(v > 1)$ 模: $\frac{J_{v-1}(u)}{J_v(u)} = \frac{u}{2(v-1)}$

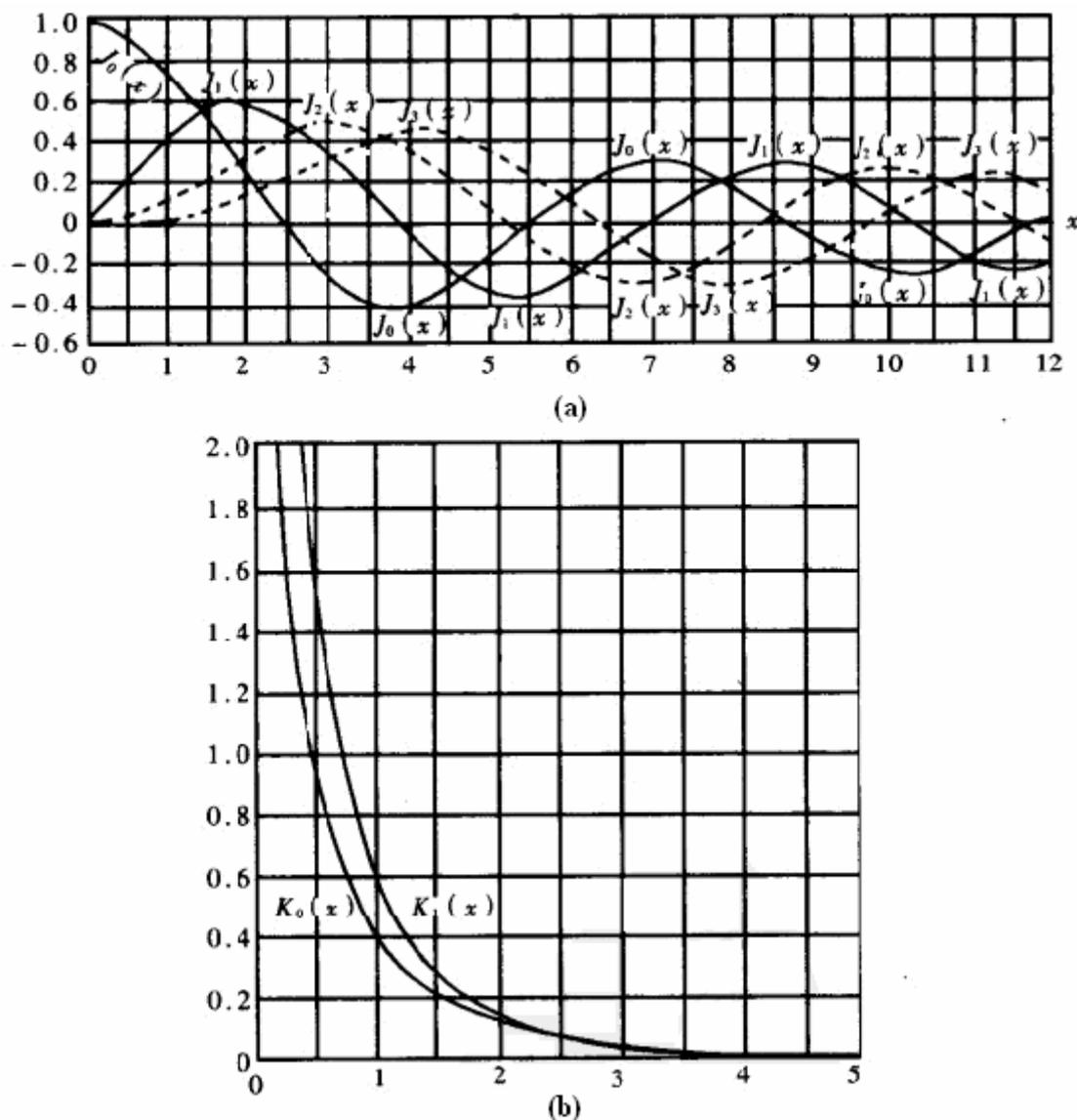


图 4.28 贝塞尔函数图形

表 4.1 贝塞尔函数的根

贝塞尔函数	$J_0(u)$	$J_1(u)$	$J_2(u)$
前三个根 (不包括零根)	2.405	3.832	5.136
	5.520	7.016	8.417
	8.654	10.173	11.62

由以上分析可知， HE_{11} 模式为光纤的主模，该模式对于任意波长的光波都能在光纤中传输，其截止频率为零。若光纤的归一化频率 $V < 2.4048$ ， $TE_{01}, TM_{01}, HE_{21}$ 模式还没有出现时，光纤中只有 HE_{11} 模。阶跃折射率光纤单模传输的条件：

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)} < 2.405 \quad (4.58)$$

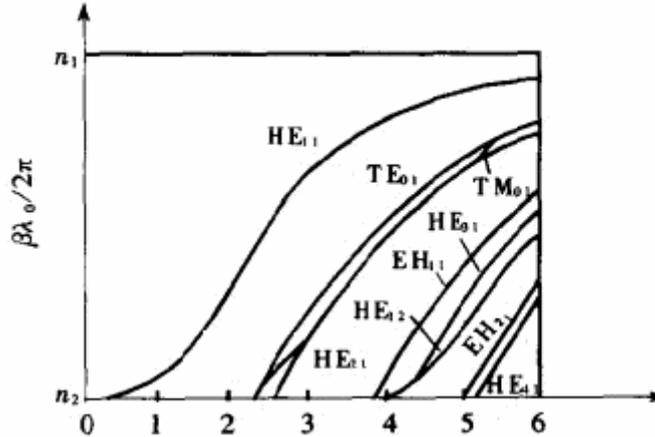


图 4.29 若干低阶模式归一化传输常数随 V 的变化曲线

当 $V > 2.405$ 后， TE_{01} 和 TM_{01} 模、 HE_{21} 模开始出现；

当 $V > 3.832$ 后， HE_{12} 、 HE_{31} 开始出现。

注： 光纤的传输模式完全由归一化频率 V 决定，即由纤芯和包层折射率、纤芯半径和传输光波长决定。

三、近似解—LP 模

用直角坐标代替圆柱坐标，使电磁场由六个分量简化为四个分量，得到 E_y, H_x, E_z, H_z 或与之正交的 E_x, H_y, E_z, H_z 。这些模式称为线性偏振 (Linearly Polarized) 模，并记为 LP_{vm} 。LP 模是 D. Glogy 在 1971 年提出的光纤传输模式的近似解。

在弱导近似条件下远离截止时， $EH_{v-1,m}$ 模和 $HE_{v+1,m}$ 模具有相同的特征方程和传输常数。由图 4.29 可看出即使不满足弱导近似， $EH_{v-1,m}$ 模和 $HE_{v+1,m}$ 模的传输常数也很接近。所以对于弱导光纤，可通过解的线性组合使问题简化。

LP 模基本出发点：不考虑 TE, TM, EH, HE 模的具体区别，仅关注其传输常数，并用 LP 模把所有弱导近似下传输常数相等的模式概括起来。

注： LP 模并不是光纤中存在的真是模式，只是弱导近似条件下为简化问题而提出的。

表 4.2 低阶模式和对应的 V 值范围

V 值范围	低阶模式			
0~2.405	LP ₀₁	HE ₁₁		
2.405~3.832	LP ₁₁	HE ₂₁	TM ₀₁	TE ₀₁
3.832~5.520	LP ₀₂	HE ₁₂		
5.520~7.016	LP ₁₂	HE ₂₂	TM ₀₂	TE ₀₂
7.016~8.654	LP ₀₃	HE ₁₃		
8.654~10.173	LP ₁₃	HE ₂₃	TM ₀₃	TE ₀₃

四、单模光纤的传播特性

1. 单模传播的条件

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)} < 2.405 \quad (4.59)$$

由式(4.59)可知,对于给定光纤(n_1, n_2, a 确定),存在一个临界波长 λ_c ,当 $\lambda < \lambda_c$ 时是多模传输,当 $\lambda > \lambda_c$ 时,是单模传输,这个临界波长 λ_c 称为**截止波长**。由此可得

$$\lambda_c = \frac{V\lambda}{2.405} \quad (4.60)$$

2. 模场分布

光强分布和模场半径:通常认为单模光纤基模的电磁场分布近似为高斯分布

$$E(r) = E(0) \exp[-(\frac{r}{w_0})^2] \quad (4.61)$$

式中 r 为径向坐标, w_0 为高斯分布 $1/e$ 点的半宽度,称为**模场半径**。对单模光纤, $2a$ 与 λ 处于同一量级,由于衍射效应,模场强度有相当一部分处于包层中,不易精确测出 $2a$ 的精确值,因而只有结构设计上的意义,在实际应用中并无实际意义,实际应用中常用模场直径 $2w_0$,即**光斑尺寸**表示,近似为

$$\frac{w_0}{a} = 0.65 + 1.619V^{-1.5} + 2.879V^{-6} \quad (4.62)$$

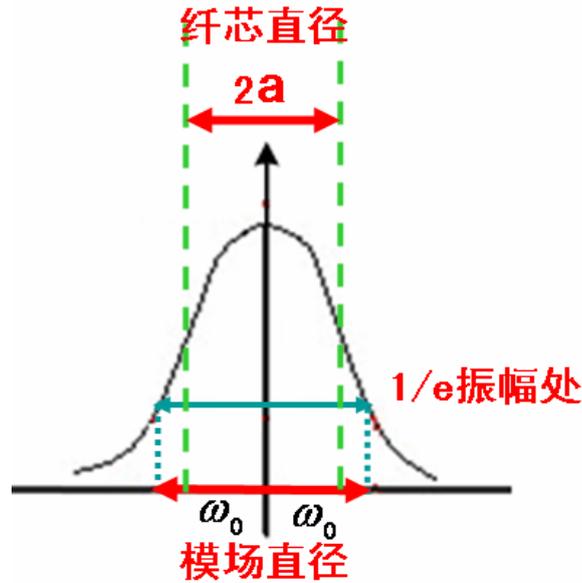


图 4.30 单模光纤模场直径示意图

3. 纤芯中的功率流

近似解析表示

$$\frac{P_{\text{芯}}}{P} \approx 1 - \exp\left(-\frac{2a^2}{w_0^2}\right) \quad (4.63)$$

V=2: 75%的模功率集中在芯区

V=1: 20%的模功率集中在芯区

大多数单模光波系统的光纤，V 参数设计在 2.0~2.4 之间。

4. 单模光纤的极化

光纤能够维持沿两正交方向偏振的简并模，虽是单模光纤也并非真正的单模。在光纤形状为严格圆柱形、材料各向同性的理想条件下，x 方向偏振态模式不会与 y 方向偏振态的模式耦合。但在实际光纤中由于形状略偏离圆柱形以及材料各向异性的微小起伏，破坏了模式简并，导致两偏振态的混合。在数学上，传输常数 β 对 x,y 方向稍有不同，光纤的该性质称为**模式双折射**。此时合成矢量的方向随传播距离的增加不断发生变化。

单模光纤的拍长：

$$L = \frac{2\pi}{\beta_y - \beta_x} \quad (4.64)$$

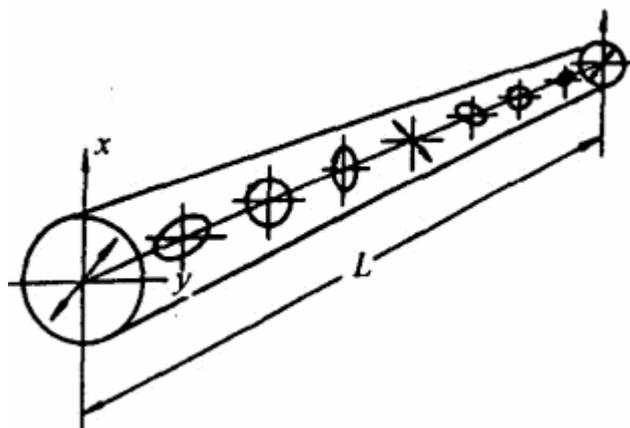


图 4.31 双折射对偏振状态的影响

保偏光纤的设计思路：故意引入大量双折射，使微小的、随机的双折射起伏不会严重影响光的偏振。具体方案有：

- (1) 破坏圆柱对称性，将纤芯做成椭圆形结构。
- (2) 引入应力双折射，也称为“熊猫光纤”或“领结光纤”。

§ 4-5 光纤的损耗与色散

一、光纤损耗

信号在光纤中传输时的衰减： $\frac{dP}{dz} = -\alpha P$

传输距离 L 之后输出光功率： $P_{out} = P_{in} \exp(-\alpha L)$

衰减系数定义为：

$$\alpha[\text{dB}/\text{km}] = -\frac{10}{L} \lg\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) \tag{4.65}$$

衰减机理：

(1) 吸收损耗

固有吸收：材料电子跃迁、分子振动吸收等。

杂质：过渡金属、OH⁻（浓度 10⁻⁶，1.39um处 50dB/km）

(2) 散射损耗

散射损耗	{	线性散射：瑞利散射
		非线性散射 { 受激布里渊散射 受激拉曼散射

(3) 弯曲损耗：光纤的弯曲引起能量泄漏到包层

光纤损耗随着使用光波长的不同而不同，称为**损耗谱**。

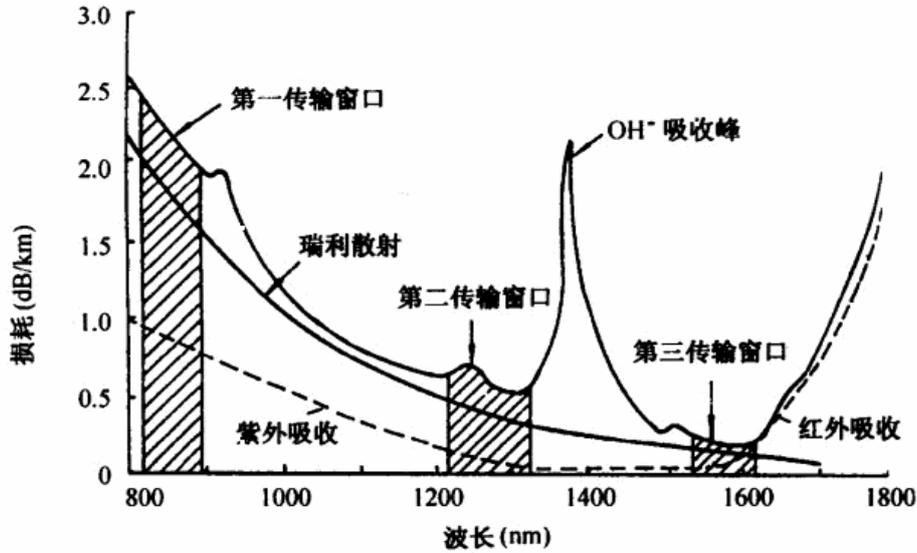


图 4.32 光纤损耗谱及工作窗口

二、光纤的色散

原因：不同频率或模式分量具有不同的群速度，在传输过程中彼此散开，将引起光脉冲展宽和码间串扰，最终影响通信距离和容量。

色散后果：时域上脉冲展宽；频域信号的频谱宽度变窄。

色散 { 模内色散 { 材料色散
 波导色散
 模间色散

色散系数 D：描述光纤的色散特性，单位为 ps/(nm.km)，代表两个波长间隔为 1nm 的光波传输 1km 后彼此之间产生的时间延迟。

$$D = D_M + D_W \quad (\text{其中 } D_W: \text{波导色散系数}; D_M: \text{材料色散系数})$$

色散引起的脉冲展宽： $\Delta T = DL\Delta\lambda$ （其中 $\Delta\lambda$ ：光源谱宽）

1. 群速度和时延差

群速度：

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{f_0} \quad (4.66)$$

信号传输单位长度的时延：

$$\tau = \frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d\beta}{dk_0} \frac{dk_0}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d\beta}{dk_0} = -\frac{\lambda^2}{2c\pi} \frac{d\beta}{d\lambda} \quad (4.67)$$

传输单位长度后不同频率分量之间的时延差：

$$\Delta\tau = \frac{d\tau(\lambda)}{d\omega} \Delta\omega = \Delta\omega \frac{d^2\beta}{d\omega^2} = \frac{1}{c} \frac{\Delta f}{f_0} k_0 \frac{d^2\beta}{dk_0^2} = -\frac{\Delta\lambda}{2c\pi} \left(2\lambda \frac{d\beta}{d\lambda} + \lambda^2 \frac{d^2\beta}{d\lambda^2} \right) \quad (4.68)$$

2. 材料色散

纤芯材料折射率随波长变化，使得一给定模式的群速度产生对波长的依赖关系。将 $\beta = 2\pi \frac{n(\lambda)}{\lambda}$ 代入 (4.68) 可得时延差为：

$$\Delta\tau = -\frac{\lambda\Delta\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \quad (4.69)$$

材料色散系数 D_M (ps/nm · km) 定义为：

$$D_M = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \quad (4.70)$$

3. 波导色散

因模式的传播常数 β 随 a/λ 变化而产生，是由光纤结构引起的色散现象，是单模光纤色散的主要原因。

4. 模间色散

多模光纤中不同模式之间传播速度不一致导致的色散现象，是多模光纤中色散的主要原因。

模间色散引起的时延差：

$$\Delta\tau = \begin{cases} \frac{n(0)\Delta(\alpha-2)}{c(\alpha+2)} (\alpha \neq 2) \\ \frac{n(0)\Delta^2}{2c} (\alpha = 2) \end{cases} \quad (4.71)$$

减小模间色散的方法：采用梯度折射率光纤，其折射率分布为

$$n(r) = n(0) \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right]^{1/2} \quad (0 < r \leq a) \quad (4.72)$$

$\alpha = 2$ 时， $\Delta\tau_{\min} = 0.25ns$ 。

5. 单模光纤的色散特性

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \frac{\Delta f}{f_0} k_0 \frac{dN_1}{dk_0} + \frac{1}{c} \frac{\Delta f}{f_0} (N_1 - N_2) V \frac{d^2(Vb)}{dV^2} \quad (4.73)$$

第一项：材料色散；第二项：波导色散。二者又统称为色度色散。

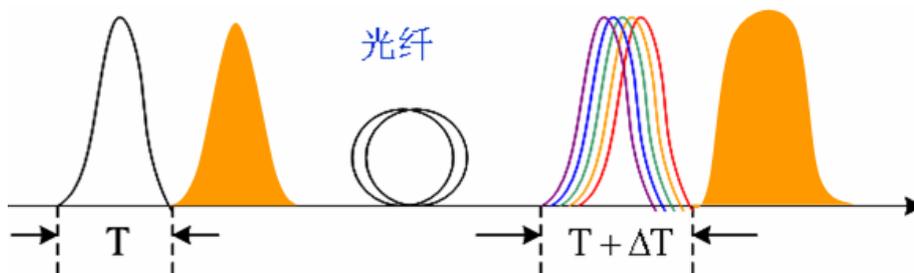


图 4.33 单模光纤中色度色散引起的脉冲展宽

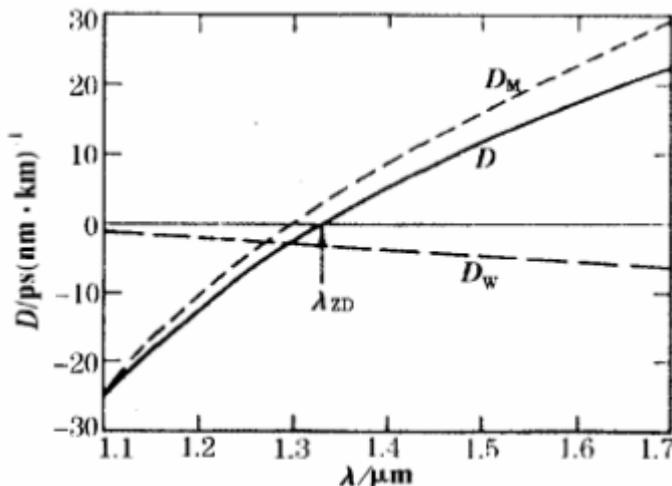


图 4.34 普通单模光纤的 D_W 、 D_M 、和 D 随波长的变化

※ 6. 色散位移光纤和非零色散位移光纤

G.652 普通单模光纤

工作波长 $\left\{ \begin{array}{l} 1.31\mu\text{m}: \text{损耗}0.3-0.4\text{dB/km}; \text{色散} \pm 3.5\text{ps}/(\text{nm} \cdot \text{km}) \\ 1.55\mu\text{m}: \text{损耗}0.2-0.25\text{dB/km}; \text{色散}18-20\text{ps}/(\text{nm} \cdot \text{km}) \end{array} \right.$

G.653 色散位移光纤：零色散波长移至 $1.55\mu\text{m}$ 处。

G.655 非零色散位移光纤：零色散波长偏移 $1.55\mu\text{m}$ ，在 $1.55\mu\text{m}$ 处的色散为 $2 \sim 3\text{ps}/(\text{nm} \cdot \text{km})$ （朗讯公司）。

G.655 光纤既解决了 G.652 光纤的色散问题，又解决了 $1.55\mu\text{m}$ 处由非线性效应导致的四波混频的限制，适用于密集波分复用通信系统。

※相速度和群速度

1. 单色光波的速度

单色平面波： $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$

相位： $\varphi = (\omega t - kz)$

给定相位位置和时间关系 $z = \frac{\omega t}{k} - \frac{\varphi}{k}$

给定的相的位置随时间而变化，其移动速度即“相速度”：

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (4.74)$$

注：相速度不是光信号（光能量）传播的速度！

求相速度的方法：先写出光波的表达式，再取相位项为常数，并对它取微分。

2. 复色光波的速度

相速度：等相位面传播的速度

群速度：等振幅面传播的速度

相速度是单色波所特有的一种速度，而实际波列可看作无数频率相近的单色波的叠加，只有这些不同波长的单色波能以同一相速度向前传播（即介质无色散），这个实际波列才能以同一速度向前移动并保持波形不变。一般的介质都有色散。也就是说各单色波以不同的相速度向前传播，其相速大小视各单色波的频率而定，于是实际波列在传播过程中就要发生变形。

设实际波列由两频率相近的等振幅余弦平面波叠加而成：

$$f_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 z)$$

$$f_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

两光波频率相差很小，有 $\omega_1 = \bar{\omega} + \delta\omega$, $\omega_2 = \bar{\omega} - \delta\omega$, $k_1 = \bar{k} + \delta k$, $k_2 = \bar{k} - \delta k$

实际的波群 f 则为两单色波 f_1 和 f_2 之和，即

$$f = f_1 + f_2 = 2A \cos(t\delta\omega - z\delta k) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$$

上式所代表的波群可近似看作一个振幅随时间和空间缓慢变化的余弦波，其振幅大小为 $2A \cos(t\delta\omega - z\delta k)$ ，如图 4.35 所示。

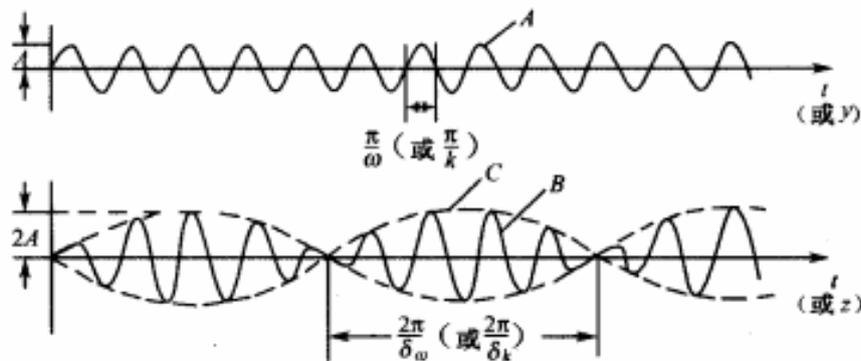


图 4.35 简单的波群

A: 叠加前的单色平面波 $A \cos(\omega_1 t - k_1 z)$

B: 叠加后的波群 $2A \cos(t\delta\omega - z\delta k) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$

C: 叠加后的振幅 $2A \cos(t\delta\omega - z\delta k)$

图中横坐标为时间变量 t 或空间变量 z 。

若在波群上任取一点（如振幅最大的点），再求出该点的位移速度，就是等幅平面的传播速度，该速度为群速度。群速度与相速度求法相同，即对等幅平面方程 $t\delta\omega - z\delta k = \text{常数}$ 微分得到： $\delta\omega dt - \delta k dz = 0$ ，即得群速度 v_g

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \quad (4.75)$$

而相速度为 $v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$ ，相速和群速的关系为

$$v_g = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (4.76)$$

在色散介质中，相速度和群速度不相等：

正常色散介质（ $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ ）中， $v > v_g$

反常色散介质（ $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ ）中， $v < v_g$

注：群速度是等振幅面传播的速度，是光能量传播的速度。